

Introduction : Les pilotes et les astronautes doivent s'entraîner avant de pouvoir voyager à des vitesses difficilement supportables pour l'homme et ils ont pour cela une machine impressionnante : la centrifugeuse humaine. Cette dernière soumet le corps humain à une forte accélération (g) : à quoi correspond l'accélération et en particulier quels en sont les caractéristiques pour un mouvement circulaire ?

I°) Quelques rappels de cinématique (étude du mouvement) (2 nde) :

Définitions :

Système : c'est l'objet étudié (.....) par exemple dans l'introduction.

Centre de gravité (ou d'inertie) : c'est le point qui résume le mieux le mouvement d..... de l'objet .

Trajectoire : Dans un référentiel donné, la trajectoire d'un mobile ponctuel est formée par l'..... des positions successives occupées par le au cours du temps.

Référentiel : c'est un solide fixe par rapport auquel on étudie le mouvement du système, on associe à ce référentiel un repère qui est le mieux adapté au problème posé.

Référentiel géocentrique (centre de la terre et 3 axes dirigés vers 3 étoiles lointaines) pour l'étude des

Référentiel héliocentrique (centre du soleil et 3 axes dirigés vers 3 étoiles lointaines) pour l'étude des

Référentiel terrestre (objet fixe par rapport à la Terre) pour l'étude de

Remarque : le repère d'espace à ne pas confondre avec le référentiel, est souvent un système d'axes orthogonaux et normés, muni d'une origine O. Dans ce repère, on peut exprimer les coordonnées du mobile ponctuel étudié.

L'étude du mouvement d'un mobile nécessite non seulement le choix d'un référentiel, auquel on associe un repère mais aussi choix d'une horloge (origine des temps) permettant de mesurer le temps.

II°) Les vecteurs position, vitesse et accélération :

a°) Vecteur position $\xrightarrow{OM}$ d'un mobile ponctuel :

Dans le repère orthonormé, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel d'étude, la position d'un mobile ponctuel est, à l'instant t, donnée par le vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées cartésiennes du point M à l'instant t.

A cet instant t, le mobile se trouve à une certaine distance de l'origine O du repère donnée par :

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

EXEMPLE On enregistre les positions, toutes les secondes, du TGV lancé par rapport au sol terrestre.

t (s)	0	1	2	3	4
x (m)	0	100	200	300	400
y (m)	2	2	2	2	2

On modélise $\vec{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = 100t \\ y(t) = 2 \end{cases}$

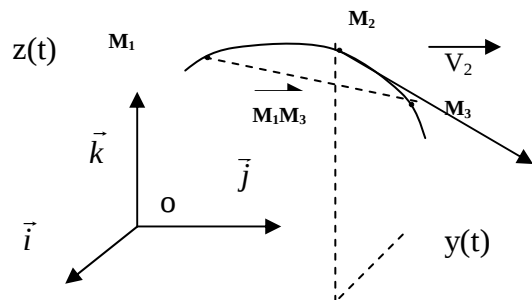
Le TGV a un mouvement rectiligne horizontal.

b°) Vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un mobile ponctuel :

Si, dans un référentiel donné, entre les dates t_1 et t_3 , le mobile se déplace de M_1 en M_3 , alors le vecteur vitesse moyenne entre ces deux dates est :

$$\vec{v}_{\text{moyenne}} = \frac{\vec{M_1M_3}}{t_3 - t_1} = \frac{\vec{OM_3} - \vec{OM_1}}{t_3 - t_1} = \frac{\vec{M_1M_3}}{t_3 - t_1}$$

$$\vec{v}_{\text{moyenne}} = \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$



Vecteur vitesse instantanée d'un mobile ponctuel :

Si, dans un référentiel donné, les dates t_1 et t_3 figurant dans l'expression précédente se rapprochent de plus en plus, on montre, en mathématiques, que la limite du vecteur vitesse moyenne est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{OM}$. Cette limite est le vecteur vitesse instantanée au point M_2 (à l'instant t_2) :

$$\vec{V}_2 = \lim_{t_3 \rightarrow t_2} \left(\frac{\overrightarrow{M_1 M_3}}{t_3 - t_1} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t} \text{ soit } \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

avec $t_1 \rightarrow t_2$ $\Delta t \rightarrow 0$

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont les dérivés par rapport au temps de la position de $\overrightarrow{OM}$ et la valeur de la vitesse est

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



Méthode pour tracer le vecteur vitesse instantanée

<https://www.youtube.com/watch?v=K9nZbWYhgPs>

Dans l'exemple du cours (schéma précédent) :

- le point d'application de $\vec{V}_2$ est le point M_2 où se trouve le mobile ponctuel à cet instant (t_2).
- la direction de $\vec{V}_2$ est celle de la en M_2 à la trajectoire suivie par le point étudié.
- le sens du vecteur vitesse est celui du mouvement.
- la longueur de $\vec{V}_2$ représente, à une échelle donnée, la du vecteur vitesse à cet instant.
- La vitesse s'exprime en dans le système international d'unités.

EXEMPLE Retour sur le cas du TGV.

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = 100t \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

donc le vecteur vitesse du TGV s'exprime par :

$$\vec{v}_{TGV}(t) \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 100 \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

La norme du vecteur vitesse du TGV est :

$$\|\vec{v}\|_{TGV} = v_{TGV} = \sqrt{(100^2 + 0^2)} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c°) Le Vecteur accélération d'un mobile ponctuel :

Dans un référentiel donné le vecteur vitesse d'un mobile ponctuel peut changer de valeur et (ou) de direction. Ce changement éventuel peut se faire plus ou moins rapidement. Le vecteur accélération moyenne exprime la variation du vecteur vitesse (en

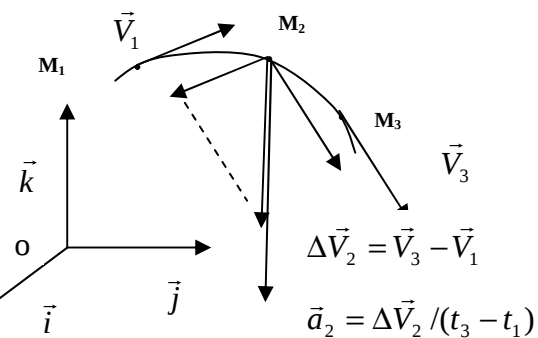
norme, direction et sens) $\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t} \vec{k}$

Si on fait tendre Δt vers 0 on parle de vecteur accélération instantanée (par exemple au point M_2) noté $\vec{a}_2$ la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{a}_2 = \lim_{t_3 \rightarrow t_2} \left(\frac{\vec{V}_3 - \vec{V}_1}{t_3 - t_1} \right) = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \text{ soit}$$

avec $t_1 \rightarrow t_2$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$



$\frac{dV_x}{dt}$, $\frac{dV_y}{dt}$ et $\frac{dV_z}{dt}$ sont les dérivés par rapport au temps du vecteur vitesse, $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2}$ les dérivés secondes de la position par rapport au temps et la valeur de l'accélération est

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Méthode pour tracer le vecteur variation de vitesse et le vecteur accélération instantanée :

<https://www.youtube.com/watch?v=RNOX8RYv9TY>

Dans l'exemple du cours (schéma précédent) :

- le point d'application de $\vec{a}_2$ est le point où se trouve le mobile ponctuel à cet instant (M_2)
- le vecteur $\vec{a}_2$ est dirigé vers l'..... de la trajectoire.
- la longueur de $\vec{a}_2$ représente, à une échelle donnée, la norme du vecteur accélération à cet instant. Elle se donne en m/s^2

Remarque : Dans le cas d'un mobile non ponctuel (un solide, par exemple), chaque point possède sa propre trajectoire, sa propre vitesse, sa propre accélération.

En classe terminale, on se limite souvent à l'étude du mouvement du centre d'inertie G du système.

EXEMPLE Une moto au démarrage en mouvement horizontal a pour équations horaires

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = 7t^2 \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

On obtient le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la moto en dérivant $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps t .

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = 14t \\ v_y(t) = 0 \end{cases}$$

On obtient le vecteur accélération $\vec{a}$ en dérivant $\vec{v}$ par rapport au temps t .

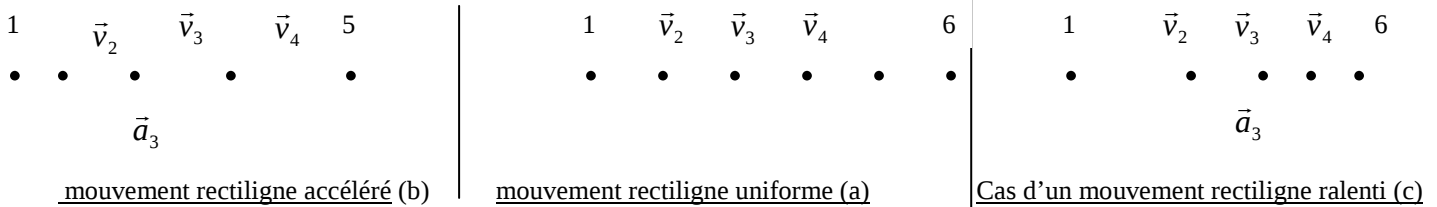
$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 14 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

On obtient la norme du vecteur accélération :

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)} = \sqrt{(14^2 + 0^2)} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

III° Etude de mouvements :

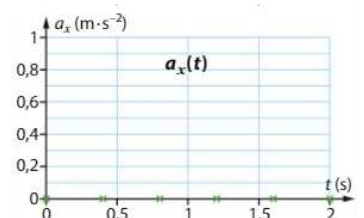
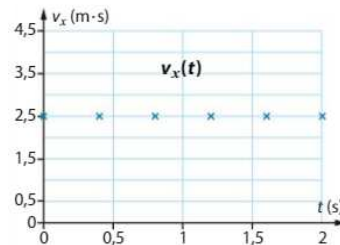
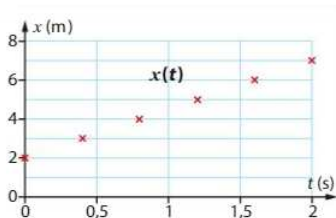
1°) **Mouvements rectilignes** : Place 3 vecteurs vitesses et 1 vecteur accélérations dans chacune des situations



a) **mouvement rectiligne uniforme** : https://www.walter-fendt.de/html5/phfr/acceleration_fr.htm (on fixe l'accélération à 0 et la vitesse initiale à 2,5 m/s par exemple)

caractéristiques d'un d'un mouvement rectiligne uniforme

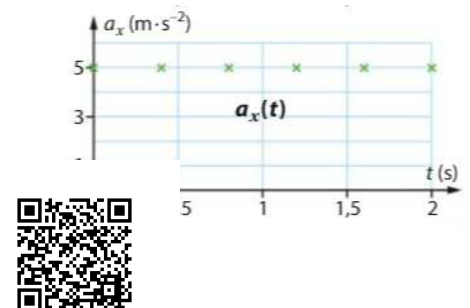
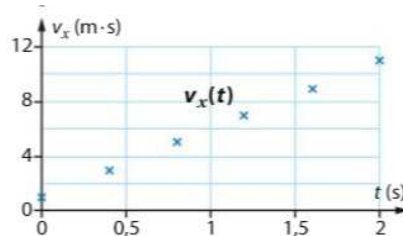
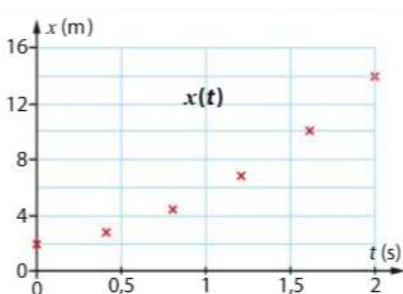
- Trajectoire : une
- Position : la représentation $x(t)$ est une fonction linéaire du type $x(t) = V_{0x} \times t + x_0$ ($V_{0x} = \text{constante}$)
- La vitesse suivant x vaut : $V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dots = \dots$
- L'accélération suivant x vaut $a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \dots$



b) **mouvement rectiligne accéléré** : https://www.walter-fendt.de/html5/phfr/acceleration_fr.htm (on fixe l'accélération à 5,0 m/s² par exemple avec une vitesse initiale positive de 1,0 m/s par exemple)

caractéristiques d'un mouvement rectiligne accéléré :

- Trajectoire : une
- Position : la représentation $x(t)$ est une fonction parabolique du type $x(t) = \frac{1}{2} \times a_{0x} t^2 + V_{0x} t + x_0$.
- Vitesse : la représentation $V_x(t)$ est une fonction linéaire du type ; $V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dots$
- Accélération (c) : $a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = a_{0x} = \text{constante}$ (.....)
- Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{a}$ (voir ci-dessus) sont de La valeur de $V_x(t)$ augmente :



c) **mouvement rectiligne ralenti** : https://www.walter-fendt.de/html5/phfr/acceleration_fr.htm (on fixe l'accélération à - 1,0 m/s² avec une vitesse initiale positive de 10 m/s par exemple les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{a}$ sont de sens, la valeur de $V_x(t)$ la représentation $x(t)$ est une fonction parabolique avec un maximum).

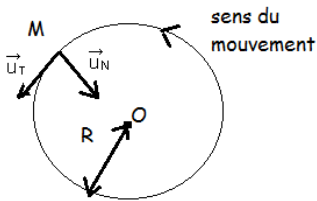
Remarque : il faut impérativement tenir compte des signes positives ou négatifs de la vitesse initiale de la position de départ ou de l'accélération dans les expressions de la position $x(t)$, de la vitesse $V_x(t)$ et de l'accélération $a_x(t)$ de façon à définir le mouvement.

2°) **Les mouvements circulaires** : un point a un mouvement circulaire si sa trajectoire est une portion de cercle.

a°) **Le repère de Frenet** :

Dans le cas des mouvements circulaires on utilisera le **repère de Frénet à ne pas confondre avec le référentiel** pour exprimer les vecteurs vitesse accélération et position. Ce repère est constituée d'un point P ou se trouve le mobile à l'instant t et de deux vecteurs orthonormés $\vec{u}_N$ (n de normale à la trajectoire) et $\vec{u}_T$ (T de tangent à la trajectoire)

Le vecteur unitaire $\vec{u}_T$ est à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile. Ce vecteur est orienté arbitrairement (pas nécessairement dans le sens du mouvement). Le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ est à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.



b°) **Expression des vecteurs position $\vec{OM}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ dans le repère de Frenet** :

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est circulaire non uniforme si en chaque instant la valeur de sa vitesse n'est pas constante et que la trajectoire est une

portion de cercle de rayon R. En chaque instant les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position sont dans le repère de Frénet (Voir ci-dessus)

$$\vec{OM} = -R.\vec{u}_N$$

$$\vec{v} = v.\vec{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_n.\vec{u}_N + a_T.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} : \text{valeur de l'accélération normale}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} : \text{valeur de l'accélération tangentielle}$$

c°) **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : https://www.walter-fendt.de/html5/phfr/circularmotion_fr.htm

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est circulaire uniforme si en chaque instant la valeur v de la vitesse est constante et que la trajectoire est une portion de cercle de rayon R. Le vecteur accélération est centripète (orienté vers le centre de la trajectoire). Les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position sont, dans la base de Frénet:

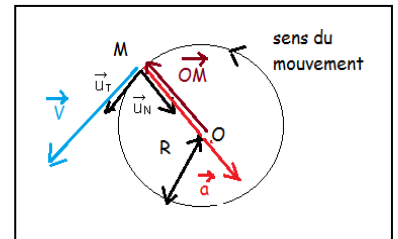
$$\vec{OM} = -R.\vec{u}_N$$

$$\vec{v} = v.\vec{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_n.\vec{u}_N + a_T.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} : \text{valeur de l'accélération normale}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ (car } v = \text{constante)} : \text{valeur de l'accélération tangentielle}$$



Remarque : Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ varie au cours du temps mais sa valeur V reste constante. Il reste tangent à la trajectoire

Exemple Le satellite Hubble a un mouvement circulaire et uniforme de rayon $R = 7000 \text{ km}$ dans le référentiel géocentrique. Il parcourt un tour sur son orbite en $T = 1 \text{ h } 37 \text{ min}$.

Sa vitesse est $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 7 \times 10^6}{97 \times 60} = 7,6 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Son accélération est $a = \frac{v^2}{R} = \frac{(7,6 \times 10^3)^2}{7 \times 10^6} = 8,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

