5 hcours/exos résumé audio

- Mouvement dans un champ de gravitation (chapitre 5 de physique) -

T°Spé

Introduction : Les projets d'atterrisseurs lunaires de Blue Origin, SpaceX et Dynetics (avec Thales Alenia Space) ont été retenus par la Nasa. On utilisera les lois de Kepler pour retrouver la période de révolution de Lune autour de la Terre, mais aussi trouver l'altitude d'un satellite géostationnaire.

I°) Les lois de Kepler : (activité)

Pour réaliser cette activité il faut : 1 feuille A_3 (42×28,7),1 feuille de papier calque, 1 règle graduée , un rapporteur , une 1 feuille de carton assez épaisse (au moins 0,3 cm) et une balance de cuisine.

Trajectoire de Mercure **(construction) :**

- *Tracer au milieu de votre feuille A3, une ligne x'x dans le sens de la longueur et placer S le soleil à 18 cm du bord droit selon la figure 1.*

Les positions de mercure sont données avec des coordonnées polaires r (distance soleil-mercure en UA unité astronomique : distance terre soleil) et angle de mercure par rapport avec l'axe x'x .

- *Compléter le tableau ci-dessous pour r en cm (*3,0 cm correspond à $1{,}0.10^{-1}$ UA) *puis tracer sur votre feuille A3 à l'aide d'un rapporteur (angle θ) et d'une règle (r en cm) les différentes positions de mercure.*

Indice	Date	Angle (θ en °)	Distance r (en UA)	Distance r (en cm)
1	20/07/1995	0	0,3075	**9,23**
2	25/07/1995	31	0,315	**9,45**
3	30/07/1995	60	0,336	**10,1**
4	04/08/1995	85	0,363	**10,9**
5	09/08/1995	106	0,392	**11,8**
6	14/08/1995	124	0,418	**12,5**
7	19/08/1995	140	0,440	**13,2**
8	24/08/1995	155	0,455	**13,7**
9	29/08/1995	169	0,464	**13,9**
10	03/09/1995	183	0,467	**14,0**
11	08/09/1995	197	0,462	**13,9**
12	13/09/1995	211	0,450	**13,5**
13	18/09/1995	227	0,432	**12,4**
14	23/09/1995	244	0,408	**12,2**
15	28/09/1995	263	0,381	**11,4**
16	03/10/1995	286	0,352	**10,6**
17	08/10/1995	312	0,326	**9,78**
18	13/10/1995	342	0,310	**9,30**
19	18/10/1995	13	0,309	**9,27**

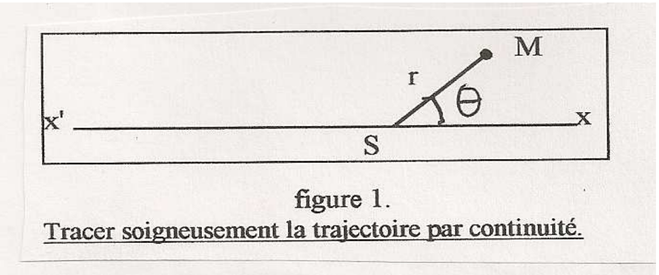


figure 1.
Tracer soigneusement la trajectoire par continuité.

Ces trois lois sont valables dans le référentiel héliocentrique, considéré comme étant Galiléen.

a°) Première loi de Kepler : loi des trajectoires : https://www.walter-fendt.de/html5/phfr/keplerlaw1_fr.htm

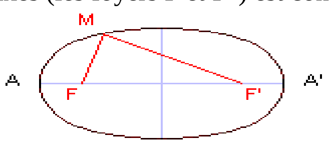
Manifestement, cette trajectoire n'est pas un cercle de centre S ; montrons qu'il s'agit d'une ellipse dont S (soleil) est l'un des foyers.

- *Rechercher la définition du* ***périhélie (P) et de l'aphélie** (A) et noter respectivement P et A sur la trajectoire de Mercure.*

Périhélie : point de l'orbite d'une planète ou d'une comète qui est la plus proche du soleil .
Aphélie : point de l'orbite d'une planète (ou d'une comète) la plus éloignée du soleil.

- *Tracer PS qui coupe la trajectoire de Mercure en un deuxième point l'aphélie (A), en déduire la valeur du demi grand axe a de la trajectoire (voir complément mathématique ci-dessous).* **AA'=22,9 cm donc a=11,45 cm soit avec l'échelle proposée a=0,381 UA**
- *Soit O le milieu de PA, tracer S' le symétrique de S (Soleil) par rapport à O.*

Rappel de mathématique : Une ellipse est formée par l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers F et F') est constante : MF + MF' = 2a



Grand axe de l'ellipse AA' = 2 a
MF + MF' = 2 a

La distance entre les deux foyers F et F' est 2c. Le demi grand axe correspond à la moitié de AA'.

- *Prendre par exemple les points 3,7 et 15 de la trajectoire de Mercure et vérifier la propriété fondamentale d'une ellipse : SM+ S'M=2a.*

$SM_3+S'M_3$=10,2 + 13,1=23,3 cm, $SM_7+S'M_7$=13 + 10=23 cm, $SM_{15}+S'M_{15}$=11,5 + 12,8=23,3 cm

1ère loi de Kepler : Dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une orbite dont le Soleil S est l'un des **foyers.**

b°) 2ième loi de Kepler : loi des aires : https://www.walter-fendt.de/html5/phfr/keplerlaw2_fr.htm

Placer une grande feuille de papier calque sur la trajectoire obtenue. Marquer les positions de S et de M pour les indices 1, 3, 8, 10, 13 et 15.

- *Placer ensuite ce calque sur du carton épais (au moins 0,3 cm) et reporter les contours des surfaces définies par les 3 points (S, 1,3), (S , 8, 10) et (S , 13, 15). Découper ces 3 surfaces que vous pèserait sur une balance de cuisine.*
- *Calculer à l'aide du tableau le temps écoulé en jours de la position 1 à 3 puis de 8 à 10 et enfin de 13 à 15.*

temps de 1à 3= 10 jours , temps de 8 à 10 = 10 jours , temps de 13 à 15=10 jours .

- *Quelle relation existe entre les surfaces balayées (S, 1,3), (S , 8, 10) et (S , 13, 15 et les temps écoulés correspondants.*

On constate que la masse des différents morceaux de carton (proportionnelles aux surfaces balayées) sont égales tout commeles temps correspondants .

> **2ième loi de Kepler** : Dans le référentiel héliocentrique, le segment de droite qui relie le centres du Soleil S à la planète M "balaie" des aires **égales** pendant des durées **égales** .

Remarque : la vitesse la plus grande de la planète est au point le plus rapproché du Soleil (périhélie). La vitesse la plus faible est en au point le plus éloigné du Soleil.

c°) 3ième loi de Kepler :

- *En utilisant le tableau des relevés des positions et le tracé de la trajectoire de Mercure, estimer en gros la période de révolution de Mercure autour du soleil (en seconde). Rappeler la période de révolution de la Terre autour du soleil (en seconde).* **$T_{Mercure}$ = 11 + 31 +30+15=87 Jours= $7{,}52\times10^{6}$ s T_{Terre}= 365,25 jours=$3{,}16\times10^{7}$ s**
- *Calculer le rapport T^2/a^3 en s^2/m^3 pour la Terre et pour Mercure (on rappelle que la distance Terre soleil est de 1 UA=$1{,}5\times10^{11}$ m) puis conclure en complétant la troisème loi de Kepler.*

$$\frac{T^2}{a^3}\ \textit{Mercure}=\frac{(7{,}52\times10^{6})^2}{(0{,}381\times1{,}5\times10^{11})^3}=2{,}95\times10^{-19}\ s^2/m^3 \qquad \frac{T^2}{a^3}\ \textit{Terre}=\frac{(3{,}16\times10^{7})^2}{(1\times1{,}5\times10^{11})^3}=2{,}96\times10^{-19}\ s^2/m^3$$

> **3ième loi de Kepler** : Dans le référentiel héliocentrique, , le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du demi-grand axe de l'orbite elliptique est **constant**: $\frac{T^2}{a^3}=\text{Cte}=\frac{4\times\pi^2}{G\times M_{corpsattracteur}}$

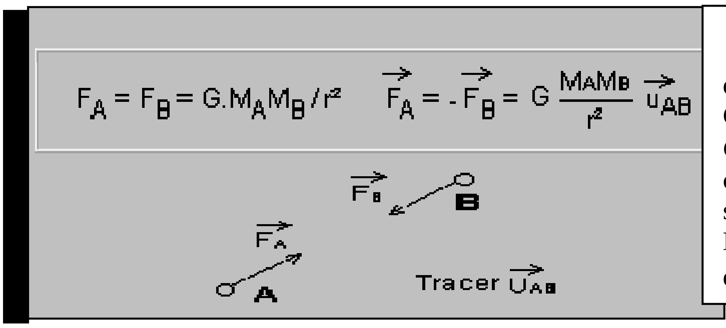
Remarque : Les trois lois de Képler sont également valables pour les satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique. La constante figurant dans T^2/a^3 = Cte n'est pas la même d'un corps attracteur à l'autre , si on ne change pas de corps attracteur elle reste la même.

II°) Mouvement circulaire des satellites et des planètes (cours et activité) :

1°) La loi de gravitation universelle sous sa forme vectorielle (rappel de seconde) :

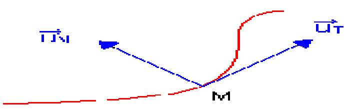
https://phet.colorado.edu/fr/simulation/gravity-and-orbits

Deux objets ponctuels A et B exercent l'un sur l'autre une force attractive dirigée suivant la droite qui les joint. Cette force varie proportionnellement au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare.



$\overrightarrow{U_{AB}}$ est le vecteur unitaire dirigé de A vers B. r est la distance qui sépare A et B **en mètre**.
G est la constante de gravitation de valeur
G = 6,67 x 10^{-11} $N.m^2.kg^{-2}$ (unités S. I.) ;
cette relation est encore vraie pour deux objets à répartition sphérique ayant une certaine masse.
La distance r est alors égale à la distance séparant le centre des deux sphères.

2°) Rappel :base de Frenet pour l'étude d'un mobile ponctuel se déplaçant dans un plan :



A la date t, on peut définir un repère ayant pour origine le point mobile M et pour base, la base orthonormée $(\overrightarrow{U_N},\overrightarrow{U_T})$. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{U_T}$ est tangent à la trajectoire plane, orienté dans le sens du mouvement ;

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{U_N}$ est normal à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.

Nous nous limiterons à l'emploi da la base de Frenet au cas des mouvements circulaires et nous écrirons (sans le démontrer : il faudra attendre post bac) que le vecteur accélération peut se décomposer de la façon suivante :

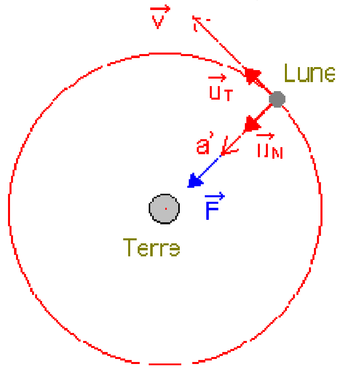
$$\vec{a}=\frac{dV}{dt}\overrightarrow{U_T}+\frac{V^2}{R}\overrightarrow{U_N}$$

3°) Application : cas de la Lune et du satellite Hubble :

On admet que la Lune décrit un mouvement circulaire uniforme, de rayon r = 384000 km, autour de la Terre.
La Terre est assimilée à une sphère de masse M = $6{,}0\times10^{24}$ kg et de rayon R = 6400 km. G = $6{,}67\times10^{-11}$ S.I

1°) Définir le référentiel géocentrique : **Le référentiel <u>géocentrique</u> supposé Galiléen est un solide formé par le centre de la terre et par les centres de 3 étoiles lointaines (les quatre points n'étant pas dans un même plan). Dans ce référentiel Paris décrit un cercle**

2°) Calculer, dans le référentiel ci-dessus, la vitesse v de la lune et sa période de révolution T (utiliser la base de Frenet , la $2^{ième}$ loi de Newton , la loi de gravitation universelle pour trouver une formule littérale de v en fonction de G , M et r*)*



Système étudié : la Lune de masse m, située à la distance r du centre de la Terre..
Une seule force extérieure est appliquée sur la Lune :
$\vec{F}$: attraction gravitationnelle de la Terre sur la Lune.
On peut écrire, dans la base de Frenet $\vec{u}_T$, $\vec{u}_N$:

$$\vec{F} = m_L \times \vec{a} = m_L \times \left(\frac{dv}{dt}\times\vec{U}_T + \frac{v^2}{r}\times\vec{U}_N\right) = \frac{G\times m_L\times M}{r^2}\times\vec{U}_N$$

Le mouvement étant circulaire uniforme $\frac{dv}{dt}$ =0 dans ce cas :

<u>v^2=G×M/r</u> donc v=(G×M/r)$^{1/2}$ avec les données de l'énoncé

v= (6,67×10^{-11}×6,0×10^{24}/384000000)=<u>1,02×10^{3}m/s</u>

Pour trouver la période de révolution on applique la formule

T= $\frac{2\times\pi\times r}{v}$ **soit T=** $\frac{2\times\pi\times 384000\times10^3}{1,02\times10^3}$ **=<u>2,36.10^6 s</u> (soit 27,3 j)**

3°) Etablir la troisième loi de Képler $\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\times\pi^2}{G\times M}$ *(on utilisera l'expression de v^2 écrite précédemment et l'expression* $T=\frac{2\times\pi\times r}{v}$*)* **: en mettant l'expression de T au carré on a T^2 = (** $\frac{2\times\pi\times r}{v}$ **)^2=** $\frac{4\times\pi^2\times r^2}{v^2}$ **et en remplaçant l'expression de v^2 on a T^2=** $\frac{4\times\pi^2\times r^2\times r}{G\times M}$ **d'où** $\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\times\pi^2}{G\times M}$ **on retrouve la troisième loi de Kepler.**

4°) En déduire la période de révolution du télescope Hubble qui gravite autour de la Terre à l'altitude h = 600 km.

A l'aide de la troisième loi de Kepler on peut isoler T :

T= $2\times\pi\times\sqrt{(R+h)^3/G\times M} = 2\times\pi\times\sqrt{(6400.10^3+600.10^3)^3/6,67.10^{-11}\times6,0.10^{24}}$ **=5,8×10^{3}s =1 h 37 min**

III°) <u>Les satellites géostationnaires</u> :

<u>Définition et conditions</u> :

Les satellites géostationnaires utilisés pour les télécommunications, télédiffusion, météorologie sont des satellites artificiels de la Terre qui sont fixes ou à la verticale du même point à la surface de la Terre ; il y a 4 conditions pour avoir ce genre de satellite :

- **le plan de l'orbite est équatorial** (plan qui coupe la Terre en ses deux hémisphères Nord et Sud).
- **Tourner dans le même sens que la Terre d'Ouest en Est par rapport aux étoiles**
- **Avoir la même période de révolution de la Terre sur son axe $T_{sidéral}$ =23 h 56 m 04 s** le jour sidéral à ne pas confondre avec le jour solaire ($T_{solaire}$=24 h temps pour présenter le même point de la Terre au soleil http://agrotheque.free.fr/s20.htm
- **Etre à une altitude d'environ 36 000 km par rapport à la surface de la Terre** (voir calcul ci-dessous).

Calculer en utilisant la troisième loi de Kepler et les données *M_{Terre} = 6,0× 10^{24} kg , rayon R terre = 6400 km. G = 6,67× 10^{-11} SI et $T_{sidéral}$ =23 h 56 m 04 s l'altitude à laquelle se trouve un satellite géostationnaire ?*

On applique la 3^{ième} loi de Kepler dans le cas du satellite géostationnaire

$\frac{T^2}{(R+h)^3}=\frac{4\times\pi^2}{G\times M_{TERRE}}$ **d'où (R+ h)=** $\sqrt[3]{\frac{T^2\times G\times M_{Terre}}{4\times\pi^2}}$

donc

h= $\sqrt[3]{\frac{(23\times3600+56\times60+4)^2\times6,67\times10^{-11}\times6,0\times10^{24}}{4\times\pi^2}}$

-6400 ×10^3=3,5×10^7 m soit 3,6×10^3 km