Correction du contrôle n°9 (2019)

Exercice 1 : **Station orbitale (12 pts)**

1.1)Cet habitant a un mouvement circulaire uniforme (trajectoire et vitesse exigée sinon -0,5) =**1 pt**

1.2. L'habitant fait un tour en une période. Ainsi :

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \frac{2\pi R}{10\pi} = \frac{R}{5{,}0} = \frac{250}{5{,}0} = 50\ m \cdot s^{-1}$$ (0,50 pt formule littérale +0,50 pt valeur) =**1 pt**

1.3. L'accélération dans la base de Frenet s'écrit :

$$\vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T} = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \frac{dv}{dt}\vec{T}$$

Or, comme l'habitant a un mouvement circulaire uniforme, son accélération tangentielle est nulle. Ainsi :

$$\vec{a} = a_N \cdot \vec{N} = \text{ d'où : } \vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$ (0,5 pt justification + 1 pt expression) =**1,5 pt**

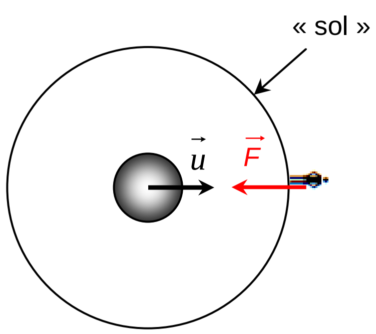
1.4. Calcul de l'accélération de l'habitant :

$$a = \frac{50^2}{250} = \frac{2500}{250} = 10\ m \cdot s^{-2}$$

Cette accélération a la même valeur que celle du champ de pesanteur terrestre. Ainsi la gravité artificielle sur le « sol » de la station est identique à celle de la Terre. Le corps de l'habitant ne se fragilisera pas (0,50 pt la valeur +0,5 pt commentaire)=**1 pt**

La méthode "science fiction" :

2.1. Expression du vecteur force de gravitation exercée par l'astre central sur l'habitant :



$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{D^2} \cdot \vec{u}$$ (**1 pt** expression vectorielle

complète avec signe moins et vecteur unitaire si oublie du signe moins -0,5 pt)

2.2. En posant : $\vec{P} = \vec{F}$

Il vient : $$m \cdot \vec{g} = -G \cdot \frac{mM}{D^2} \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g} = -G \cdot \frac{M}{D^2} \cdot \vec{u}$$

Donc : $$g = G \cdot \frac{M}{D^2}$$ (**1 pt** démonstration)

2.3. En utilisant l'expression précédente, on obtient l'égalité suivante : $M = \dfrac{g \cdot D^2}{G}$

Application numérique : $$M = \frac{10 \times 100^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \qquad M = \frac{1{,}0 \times 10^5}{6{,}67.10^{-11}} \qquad M = 1{,}5.10^{15}\ kg$$

(**1 pt formule littérale + 1 pt calcul détaillé avec valeur**) **=2 pts**

3.1. La station tourne autour de la Terre, tout comme la Lune. Ainsi, d'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{{T_S}^2}{A^3} = \frac{{T_L}^2}{{A_L}^3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad T_S = T_L \cdot \sqrt{\frac{A^3}{{A_L}^3}}$$ (1 pt expression +0,5 pt démonstration)=**1,5 pt**

3.2. En utilisant la formule précédente on aura :

$$T_S = 2{,}0 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{(1{,}0 \cdot 10^7)^3}{(3{,}0 \cdot 10^8)^3}} \Leftrightarrow T_S = 2{,}0 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{1{,}0 \cdot 10^{21}}{27 \cdot 10^{24}}} \Leftrightarrow \quad {T_S}^2 = 4{,}0 \cdot 10^{12} \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^{21}}{27 \cdot 10^{24}}$$

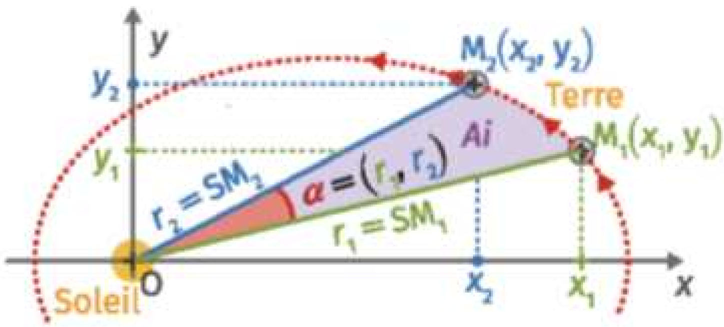
$$\Leftrightarrow \qquad {T_S}^2 \approx \frac{4{,}0 \cdot 10^{33}}{27.10^{24}} \approx 1{,}5 \cdot 10^8 \Leftrightarrow T_S \approx 1{,}2 \cdot 10^4 \ s$$ (3 h 20 min) (1 pt le calcul détaillé +1 pt la valeur)=**2 pts**

<u>Exercice 2</u> : Gravitation et programmation numérique en python (8 pts)

1°) Le référentiel héliocentrique est le référentiel le plus adapté pour étudier le mouvement des planètes autour du Soleil. Son origine est le centre de gravité du Soleil. Les trois axes sont choisis en direction de trois étoiles lointaines considérées comme fixes le temps de l'étude **(0,5 pt le référentiel + 0,5 pt les caractéristiques)= 1pt**

2°) Dans l'extrait du code python proposé on calcule la surface A entre deux positions successives de la Terre, M1 et M2, suivant la méthode suivante :
- ligne 13 et 14 : calcul de la distance ri entre chaque point Mi et le Soleil et à l'aide de leurs coordonnées héliocentriques et ce pour les points i et i-1 ;
- ligne 15 : calcul de la surface A comprise entre les deux rayons vecteurs r1 et r2 centrés sur le Soleil suivant la formule où α est l'angle compris entre deux rayons vecteurs r1 et r2.

(0,5 pt par ligne + 0,5 pt par fonction)*2=2 pts



3°) $\frac{{T_{Mercure}}^2}{{a_{Mercure}}^3} = \frac{{T_{Terre}}^2}{{a_{Terre}}^3}$ soit $\frac{87{,}9^2}{0.39^3}$ =1,3×10^5 J^2 ×ua^{-3} et $\frac{365.25^2}{1{,}00^3}$ = 1,33×10^5 J^2 ×ua^{-3} **(0,5 pt formule littérale + 1 pt chaque calcul = 2,5 pts**

4°) La Formule littérale complète de la troisième loi de Kepler s'écrit avec le soleil comme attracteur :

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \times \pi^2}{G \times M_{Soleil}}$ d'où $M_{soleil} = \frac{4 \times \pi^2 \times a^3}{G \times T^2}$ soit en prenant par exemple les données sur Mercure

$M_{soleil} = \frac{4 \times \pi^2 \times (0{,}39 \times 1{,}5 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (87.9 \times 24 \times 3600)^2}$ =2,0. 10^{30} kg **(1 pt formule complète de la troisième loi de Kepler + 0,5 pt formule de Msoleil + 1 pt la valeur de MSoleil)=2,5 pts**